التمرين الأول

نعتبر المعادلة (E_n) ذات المجهولين الصحيحين x و y الآتية : $645x-195y=13^n-54n-1$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

1- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15.

2- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

3- جد الحل الخاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (E_2) بحيث $x_0+y_0=4$ ثم حل المعادلة (E_2).

4- A عدد طبيعي يكتب $\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^6$ في النظام ذي الأساس 6 و يكتب $\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}^5$ في النظام ذي الأساس 5.

- عين قيمة الأعداد الطبيعية α، β و γ ثم أكتب العدد A في النظام العشري.

التمرين الثاني

1- يحتوي صندوق على 4 كرات خضراء ثلاثة منها تحمل الرقم 1 و واحدة تحمل الرقم 2 وكرتين حمراوين تحملان الرقمين 0 و -1 ، كل الكرات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس.

✍ نسحب من الصندوق عشوائيا **كرتين على التوالي بالارجاع**

- ما احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما.
- ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني.

2- نقوم الآن باستبدال الكرات الحمراء بـ n كرة بيضاء تحمل الرقم 2 حيث $n>1$ و نسحب من الصندوق عشوائيا **كرتين على التوالي و بدون إرجاع.**

✍ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين.

- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.
- بين أن الأمل الرياضياتي $E(X)=\dfrac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$.

التمرين الثالث

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^3+8=0$

تذكير: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B و D التي لواحقها $z_A=-2$ ، $z_B=1-i\sqrt{3}$ و $z_D=\overline{z_B}$.

1-أ) أكتب العدد $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABD.

ب)أكتب معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD.

ج) عين قيم العدد الصحيح n حتى يكون $\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقي موجب.

2- لتكن النقطة C مرجح الجملة $\{(A;-1),(B;1),(D;1)\}$.

أ) عين z_C لاحقة النقطة C ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

ب) أحسب قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO})$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C).

3- R الدوران الذي مركزه D و يحول النقطة A إلى B.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب) تحقق أن $R(B)=C$ ثم استنتج صورة المثلث ABD بالدوران R.

4- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

التمرين الأول

1- دراسة بواقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 15:

n	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
الباقي	1	13	4	7

2- تعيين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها المعادلة (E_n) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$:

لكي تقبل المعادلة (E_n) حلولا في $\mathbb{Z}^2$ يجب أن يكون $p\,gcd(645,195)=15$ يقسم $13^n-54n-1$ أي $13^n-54n-1\equiv 0[15]$ ، لدينا أربع حالات هي :

• من أجل $\boxed{n=4k}$:

$13^{4k}-54(4k)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $1-216k-1\equiv 0[15]$

يكافئ $-6k\equiv 0[15]$ نقسم على 3 نجد $-2k\equiv 0[5]$

بما أن 5 يقسم الجداء $(-2k)$ و 5 أولي مع 2 فإنه $k\equiv 0[5]$

ومنه $k=5p$ اذن $n=4k=4(5p)=20p\,/\,p\in\mathbb{N}$.

• من أجل $\boxed{n=4k+1}$:

$13^{4k+1}-54(4k+1)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $-216k\equiv 42[15]$

يكافئ $-k\equiv 2[5]$ يكافئ $k\equiv 3[5]$ ومنه $k=5p+3$ اذن

$n=4k+1=4(5p+3)+1=20p+13\,/\,p\in\mathbb{N}$.

• من أجل $\boxed{n=4k+2}$:

$13^{4k+2}-54(4k+2)-1\equiv 0[15]$ يكافئ

$-216k-105\equiv 0[15]$

يكافئ $k\equiv 0[5]$ ومنه $k=5p$ اذن

$n=4k+2=4(5p)+2=20p+2\,/\,p\in\mathbb{N}$.

• من أجل $\boxed{n=4k+3}$:

$13^{4k+3}-54(4k+3)-1\equiv 0[15]$ يكافئ $-6k-6\equiv 0[15]$

يكافئ $-2k\equiv 2[5]$ نقسم على 2 نجد $-k\equiv 1[5]$ أي

$k\equiv 4[5]$ ومنه $k=5p+4$ اذن

$n=4k+3=4(5p+4)+3=20p+19\,/\,p\in\mathbb{N}$

ومنه قيم n هي :

$n\in\{20p;20p+13;20p+2;20p+19\,/\,p\in\mathbb{N}\}$

3- إيجاد الحل الخاص :

نبسط المعادلة (E_2) :

$(E_2)...645x-195y=13^2-54(2)-1$ نقسم طرفي المعادلة على 15 نجد: $(E_2)...43x-13y=4$

لدينا $\begin{cases}43x_0-13y_0=4\\ x_0+y_0=4\end{cases}$ نحل جملة المعادلة نجد $x_0=1$ و $y_0=3$ اذن الحل الخاص هو $(1;3)$.

• حل المعادلة (E_2):

لدينا $\begin{cases}43x-13y=4\cdots\cdots(*)\\ 43(1)-13(3)=4\cdots\cdots(**)\end{cases}$ أي

$43(x-1)=13(y-4)$ ، بما أن 13 يقسم الجداء $43(x-1)$ و 13 أولي مع 43 فإنه حسب غوص 13 يقسم $(x-1)$ أي $x-1=13k$ ومنه $x=13k+1$ نعوض قيمة x في المعادلة $(*)$ نجد $y=43k+3$ اذن مجموعة حلول المعادلة (E_2) هي: $S=\{(13k+1;34k+3)\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

4- تعيين قيمة الأعداد الطبيعية α، β و γ :

$$\begin{cases}A=\overline{\alpha\beta\alpha\beta\alpha}^{6}=\alpha\times6^0+\beta\times6^1+\alpha\times6^2+\beta\times6^3+\alpha\times6^4\\ A=\overline{\beta0\gamma\gamma\gamma}^{5}=\gamma\times5^0+\gamma\times5^1+\gamma\times5^2+0\times5^3+\beta\times5^4\\ 1\le\alpha\le5\\ 1\le\beta\le4\\ 0\le\gamma\le4\end{cases}$$

أي $\begin{cases}A=1333\alpha+222\beta\\ A=31\gamma+625\beta\\ 1\le\alpha\le5\\ 1\le\beta\le4\\ 0\le\gamma\le4\end{cases}$ معناه

$\begin{cases}1333\alpha+222\beta=31\gamma+625\beta\\ 1\le\alpha\le5\\ 1\le\beta\le4\\ 0\le\gamma\le4\end{cases}$ أي $\begin{cases}43\alpha-13\beta=\gamma\\ 1\le\alpha\le5\\ 1\le\beta\le4\\ 0\le\gamma\le4\end{cases}$

نلاحظ أن α، β حلين للمعادلة $(*)$ بالمطابقة مع المعادلة $(**)$ نجد $\alpha=1$، $\beta=3$ و $\gamma=4$.

كتابة العدد A في النظام العشري:

$A=1333\alpha+222\beta=A=1333(1)+222(3)=1999$

التمرين الثاني

-1

• احتمال الحصول على كرتين جداء رقميهما سالب تماما:

$$P(A)=\frac{2(1^1\times4^1)}{6^2}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

• احتمال الحصول على كرة حمراء في السحب الثاني:

$$P(B)=\frac{2(4^1\times2^1)+2^2}{6^2}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

-2

• تعيين قيم المتغير العشوائي X : $X\in\{2;3;4\}$

الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{n+4}^2=\frac{(n+4)(n+3)\cancel{(n+2)!}}{\cancel{(n+4-2)!}}=(n+4)(n+3)$$

قانون الاحتمال :

$$P(X=2)=\frac{A_3^2}{A_{n+4}^2}=\frac{6}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=3)=\frac{2\left(A_{n+1}^1\times A_3^1\right)}{A_{n+4}^2}=\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

$$P(X=4)=\frac{A_{n+1}^2}{A_{n+4}^2}=\frac{\frac{(n+1)(n)\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n+1-2)!}}}{(n+4)(n+3)}=\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}$$

اذن :

X	2	3	4
$P(X=X_i)$	$\frac{6}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}$	$\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}$

- تبيين أن $E(X)=\frac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$:

$$E(X)=2\times\frac{6}{(n+4)(n+3)}+3\times\frac{6(n+1)}{(n+4)(n+3)}+4\times\frac{(n)(n+1)}{(n+4)(n+3)}=\frac{4n^2+22n+30}{(n+3)(n+4)}$$

التمرين الثالث

I. حل المعادلة $z^3+8=0$:

لدينا $z^3+8=(z+2)(z^2-2z+4)$

$z^3+8=0$ تكافئ $(z+2)(z^2-2z+4)=0$

تكافئ $z+2=0$ أي $z_0=-2$

أو $z^2-2z+4=0$ نحسب $\Delta=-12=i^2\times 12=(2i\sqrt{3})^2$

ومنه
$$\begin{cases} z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3} \\ \text{أو} \\ z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+2i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \end{cases}$$

اذن مجموعة حلول المعادلة $S=\{-2;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$

II.

1- أ) كتابة العدد $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}$ **على الشكل الأسي :**

$$\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1+i\sqrt{3}+2}{1-i\sqrt{3}+2}=\frac{(3+i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}{(3-i\sqrt{3})(3+i\sqrt{3})}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا $\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$ و

$$\begin{cases} \cos\theta=\frac{\frac{1}{2}}{1}=\frac{1}{2} \\ \sin\theta=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}\ \theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}$$ اذن $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

- **استنتاج طبيعة المثلث** ABD :

بما أن $\left|\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ فإن المثلث ABD متقايس الأضلاع.

ب) كتابة معادلة الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD:

بما أن المثلث متقايس الأضلاع فإن مركز ثقله هو مركز للدائرة المحيطة به أي $z_G=\frac{z_A+z_B+z_D}{3}=0$ نلاحظ أن النقطة G هي مبدأ المعلم O ونصف قطرها هو

$$r=|OA|=\sqrt{(-2)^2+0^2}=2=|OB|=|OD|$$

لدينا $(C):(x-x_O)^2+(x-y_O)^2=r^2$ اذن معادلة الدائرة هي $(C):x^2+y^2=4$

ج) تعيين قيم العدد الصحيح n حتى يكون $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ **حقيقي موجب:**

$\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)^n=2k\pi$

أي $n\times\frac{\pi}{3}=2k\pi$ ومنه $n=6k\ /\ k\in\mathbb{Z}$

2- أ) تعيين z_C :

$$z_C=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_D}{-1+1+1}=\frac{-(-2)+1-i\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}}{1}$$

اذن $z_C=4$

- **طبيعة الرباعي** $ABCD$: معين

التبرير : $CD=AC=AB=BD$ و $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})\neq\frac{\pi}{2}$

ب) حساب قيس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO})$:

$$(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO})=arg\left(\frac{z_O-z_D}{z_C-z_D}\right)=arg\left(\frac{-(1-i\sqrt{3})}{4-(1-i\sqrt{3})}\right)$$

$$=arg\left(-i\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$$

- **استنتاج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة** (C):

بما أن $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DO})$ زاوية قائمة و النقطة $D\in(C)$ فإن المستقيم (DC) مماس للدائرة (C) في النقطة D .

3- أ) العبارة المركبة للدوران R :

لدينا العبارة المركبة للدوران هي $z'=az+b$

$a=\frac{z_B-z_D}{z_A-z_D}=e^{i\frac{\pi}{3}}$ لأن المثلث ABD متقايس الأضلاع

أي $\left(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{DB}\right)=\frac{\pi}{3}$ لأنها في الاتجاه المباشر أو يمكن التحقق حسابيا.

$z_D=\frac{b}{1-a}$ أي $b=z_D(1-a)=(1+i\sqrt{3})\left(1-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=2$

اذن العبارة المركبة للدوران R هي $z'=e^{i\frac{\pi}{3}}z+2$ أو $z'=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z+2$.

ب) تحقق أن $R(B)=C$:

$$z'=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_B+2=\left(1+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i\sqrt{3})+2=4=z_C$$

اذن C صورة B بالدوران R أي $R(B)=C$.

- **استنتاج صورة المثلث ABD بالدوران R :**

لدينا $\begin{cases}R(D)=D\\R(B)=C\\R(A)=B\end{cases}$ اذن صورة المثلث ABD بالدوران R هو المثلث BCD.

4- تعيين (Γ) : لدينا $arg\left(\overline{z}+2\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يكافئ $arg\left(\overline{z+2}\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ يكافئ $-arg\left(z-(-2)\right)=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

يكافئ $arg\left(z-z_A\right)=-\frac{\pi}{6}-2k\pi$ ومنه مجموعة النقط (Γ) هي نصف مستقيم مبدؤه النقطة A باستثناء النقطة A.